

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 10, стр. С.28–С.34 (2013)

УДК 512.5

MSC 13A99

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЭЙКОНАЛА

С.И. КАБАНИХИН, О.И. КРИВОРОТЬКО

Аннотация. Проведен сравнительный анализ двух численных методов решения уравнения эйконала: метода С.К. Годунова второго порядка и метода характеристик. Для применения метода С.К. Годунова вводится нестационарное уравнение с искусственной временной переменной t , решение которого стремится к решению уравнения эйконала с ростом t . Приведены результаты численных расчетов. Полученный алгоритм использован для расчета переднего фронта волны цунами в случае линейного источника.

Ключевые слова: уравнение эйконала, метод Годунова, метод би-характеристик, амплитуда переднего фронта.

ВВЕДЕНИЕ

Уравнение эйконала применяется во многих разделах геометрической оптики, акустики, электроники, механики при определении линий, вдоль которых распространяются волны различной физической природы.

В разделе 1 представлено два подхода для численного решения задачи Коши для уравнения эйконала. В первом, с учетом гиперболического типа нелинейного уравнения эйконала построена монотонная схема С.К. Годунова второго порядка [1, 2]. Во втором, уравнение эйконала сведено к системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка [3, 4]. В разделе 2 продемонстрировано действие алгоритмов на модельных примерах. В разделе 3 показано использование уравнение эйконала для расчета переднего фронта волны цунами в случае линейного источника [5].

КАБАНИХИН, S.I., КРИВОРОТЬКО, O.I., NUMERICAL SOLUTION EIKONAL EQUATION.

© 2013 Кабанихин С.И., Криворотько О.И.

Работа поддержана РФФИ (грант 12-01-00773), проект 12-2013 сотрудничества СО РАН и НАН Украины.

Поступила 5 мая 2013 г., опубликована 31 мая 2013 г.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ

Рассмотрим начальную задачу для уравнения эйконала:

$$\begin{cases} \tau_x^2 + \tau_y^2 = c^{-2}(x, y), & (x, y) \in \mathbb{R}^2, \\ \tau(x_0, y_0) = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Здесь $c(x, y)$ – скорость распространения волны в среде, $\tau(x, y)$ означает время, за которое возмущение из точки (x_0, y_0) достигнет точки (x, y) , (x_0, y_0) – координата точечного источника волн.

1.1. **Схема Годунова решения уравнения эйконала.** Решение задачи (1.1) находится как установившееся решение нестационарного уравнения

$$\phi_t + \phi_x \phi_x + \phi_y \phi_y = c^{-2}(x, y) \quad (1.2)$$

с граничным условием в точечном источнике $\phi(x_0, y_0) = 0$. На внешних границах рассматриваемой области $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (0, L_x), y \in (0, L_y)\}$ задаются условия отсутствия отражения.

Если первые сомножители в левых частях произведений в (1.2) обозначить через $U = \phi_x, V = \phi_y$ и интерпретировать U и V как компоненты скорости, то получим уравнение близкое к уравнению конвективного переноса

$$\phi_t + U\phi_x + V\phi_y = c^{-2}(x, y). \quad (1.3)$$

Для численного решения уравнения (1.3) используем противопоточную схему второго порядка точности, которая является вариантом схемы Годунова [1] для данного уравнения. В соответствии с этой численной схемой, в каждой расчетной точке равномерной сетки

$$\begin{aligned} \omega &:= \{(x_i, y_j) \in \Omega \mid x_i = ih_x, y_j = jh_y, i = \overline{0, N_x - 1}, j = \overline{0, N_y - 1}\}, \\ h_x &= L_x / (N_x - 1), \quad h_y = L_y / (N_y - 1), \end{aligned}$$

вычисляются аппроксимации частных пространственных производных и соответствующих компонент «скорости» с использованием специально ограниченных вторых разделенных разностей

$$\begin{aligned} \phi(x_{i-1j}, x_{ij}, x_{i+1j}) &= \frac{\phi_{i+1j} - 2\phi_{ij} + \phi_{i-1j}}{h_x^2}, \\ \phi(x_{i-2j}, x_{i-1j}, x_{ij}) &= \frac{\phi_{ij} - 2\phi_{i-1j} + \phi_{i-2j}}{h_x^2}, \\ \phi(x_{ij}, x_{i+1j}, x_{i+2j}) &= \frac{\phi_{i+2j} - 2\phi_{i+1j} + \phi_{ij}}{h_x^2}, \\ \phi_x^+ &= \frac{\phi_{i+1j} - \phi_{ij}}{h_x} - \frac{1}{2}h_x \text{minmod}(\phi(x_{i-1j}, x_{ij}, x_{i+1j}), \phi(x_{ij}, x_{i+1j}, x_{i+2j})), \\ \phi_x^- &= \frac{\phi_{ij} - \phi_{i-1j}}{h_x} + \frac{1}{2}h_x \text{minmod}(\phi(x_{i-2j}, x_{i-1j}, x_{ij}), \phi(x_{i-1j}, x_{ij}, x_{i+1j})), \\ U_{i+1j} &= \phi_x^+, U_{ij} = \phi_x^-, \quad V_{ij+1} = \phi_y^+, V_{ij} = \phi_y^-. \end{aligned}$$

Здесь величины ϕ_y^+ и ϕ_y^- вычисляются аналогичным образом, как ϕ_x^+ и ϕ_x^- ,

$$\text{minmod}(a, b) = \begin{cases} 0, & ab < 0, \\ a, & |a| \leq |b|, \\ b, & |b| < |a|. \end{cases}$$

Согласно принципу противопоточности, аппроксимация пространственных производных отбирается по знаку скорости и ее абсолютной величине по следующему алгоритму:

1. Если $U_{ij} \geq 0, U_{ij} \geq -U_{i+1j}$, то $m_{ij} = 1$ и $m_{i+1j} = 0$ в противном случае.
2. Если $U_{i+1j} \leq 0, U_{i+1j} \leq -U_{ij}$, то $m_{i+1j} = 1$ и $m_{ij} = 0$ в противном случае.
3. Если $m_{ij} + m_{i+1j} = 2$, то $m_{i+1j} = 1$ и $m_{ij} = 0$.

Аппроксимации производных и компонента x вектора «скорости переноса» записываются следующим образом:

$$\left(\hat{\phi}_x\right)_{ij}^k = m_{ij}\phi_x^- + m_{i+1j}\phi_x^+, \quad \tilde{U}_{ij} = m_{ij}U_{ij} + m_{i+1j}U_{i+1j}.$$

Аналогично вычисляются аппроксимации производных по y и соответствующей компоненты скорости \tilde{V} . Граничные условия на внешней границе аппроксимируют со вторым порядком условие отсутствия отражения:

$$\begin{aligned} \phi_{ij}^{k+1} &= \phi_{ij}^k - \Delta t \left(\tilde{U}_{ij} \left(\hat{\phi}_x\right)_{ij}^k + \tilde{V}_{ij} \left(\hat{\phi}_y\right)_{ij}^k - c_{ij}^{-2} \right), \quad i = \overline{2, N_x - 3}, j = \overline{2, N_y - 3} \\ \phi_{i_0, j_0}^k &= 0, \\ \phi_{ij}^k &= \phi_{i+3j}^k - 3\phi_{i+2j}^k + 3\phi_{i+1j}^k, \quad i = 0, 1, j = \overline{0, N_y - 1}, \\ \phi_{ij}^k &= \phi_{i-3j}^k - 3\phi_{i-2j}^k + 3\phi_{i-1j}^k, \quad i = N_x - 2, N_x - 1, j = \overline{0, N_y - 1}, \\ \phi_{ij}^k &= \phi_{i, j+3}^k - 3\phi_{i, j+2}^k + 3\phi_{i, j+1}^k, \quad i = \overline{0, N_x - 1}, j = 0, 1, \\ \phi_{ij}^k &= \phi_{i, j-3}^k - 3\phi_{i, j-2}^k + 3\phi_{i, j-1}^k, \quad i = \overline{0, N_x - 1}, j = N_y - 2, N_y - 1. \end{aligned}$$

Здесь k – номер расчетного слоя по времени, (i_0, j_0) – номер точечного источника (x_0, y_0) на расчетной сетке ω .

1.2. Метод бихарактеристик решения уравнения эйконала. Введем в рассмотрение функцию $b(x, y) = 1/c(x, y)$ и вектор $p = (p_1, p_2) = \left(\frac{\partial \tau}{\partial x}, \frac{\partial \tau}{\partial y}\right)$. Дифференцируя уравнение эйконала $|p|^2 = b^2(x, y)$ по x и y , получим

$$pp_x = bb_x, \quad pp_y = bb_y. \quad (1.4)$$

Из определения вектора p следует, что $(p_1)_y = (p_2)_x$ и, значит, (1.4) можно привести к виду:

$$p\nabla p_1 = bb_x, \quad p\nabla p_2 = bb_y. \quad (1.5)$$

Разделим (1.5) на $b^2(x, y)$ и перепишем вдоль кривых $\frac{dx}{dt} = pb^{-2}(x, y)$, $\frac{dy}{dt} = pb^{-2}(x, y)$:

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} \ln b(x, y), \quad \frac{dp_2}{dt} = \frac{\partial}{\partial y} \ln b(x, y).$$

Вдоль этих же кривых $\tau(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\tau}{dt} = \nabla \tau \frac{dx}{dt} = b^{-2}(x, y) |p|^2 = 1.$$

Если выбрать параметр t так, чтобы $\tau = 0$ при $t = 0$, то тогда $t = \tau$ и параметр t будет равен времени прохождения сигнала от (x_0, y_0) до (x, y) . Введем произвольный единичный вектор ν^0 и решим задачу Коши для системы

обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = p_1 \cdot b^{-2}(x, y), & \frac{dy}{dt} = p_2 \cdot b^{-2}(x, y); \\ \frac{dp_1}{dt} = \frac{b_x(x, y)}{b(x, y)}, & \frac{dp_2}{dt} = \frac{b_y(x, y)}{b(x, y)}; \\ (x, y)|_{t=0} = (x_0, y_0), & p|_{t=0} = p^0 \equiv b(x_0, y_0)\nu^0. \end{cases} \quad (1.6)$$

Систему (1.6) мы решаем методом Рунге-Кутты четвертого порядка аппроксимации. В результате мы найдем x, y, p_1 и p_2 как функции от t и параметров x_0, y_0 и p^0 :

$$x = h_1(t, x_0, y_0, p^0), y = h_2(t, x_0, y_0, p^0), p_1 = \psi_1(t, x_0, y_0, p^0), p_2 = \psi_2(t, x_0, y_0, p^0).$$

Первые два равенства при фиксированной (x_0, y_0) определяют в пространстве переменных x, y, t двухпараметрическое семейство бихарактеристик. Проекцию бихарактеристики на пространство (x, y) называют лучом. Первые два равенства задают луч параметрически [3].

Пусть $t \in (0, T)$. Построим разбиение области $(0, T)$: $t_k = k \frac{T}{N_t}, k = 0, 1, \dots, N_t$, и обозначим $(x_k, y_k) := (x(t_k), y(t_k))$. Тогда $\tau(x_k, y_k)$ вычисляется следующим образом:

$$\tau(x_k, y_k) = \int_0^{x_k} \frac{\partial \tau(x, y_k)}{\partial x} dx. \quad (1.7)$$

2. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Пример 1. Расчет времени прихода первых волн от точечного источника в изотропной среде, расположенного в центре квадратной области размера $L_x = L_y = 2$ при $c(x, y) = 1$. Область покрывалась сеткой $N_x = N_y = 101$.

Результат, полученный при помощи метода Годунова второго порядка точности и метода бихарактеристик показан на рисунке 2.1.

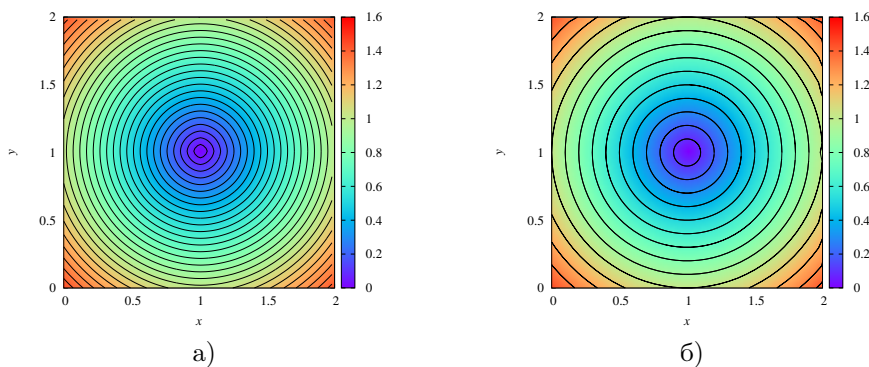


Рис. 2.1. Времена прихода первых волн от точечного источника при $c(x, y) = 1$, полученные: а) методом Годунова, б) методом бихарактеристик.

Отметим, что полученные численные решения уравнения эйконала близки к явному точному решению $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$. Погрешности методов подробно представлены в [2].

Пример 2. Расчет времени прихода первых волн в глубокой воде, ограниченной прямоугольной областью размера $L_x = 5$ км, $L_y = 10$ км. Область покрывалась сеткой $N_x = 200$, $N_y = 300$.

Рельеф дна изображен на рисунке 2.2. На рисунке 2.3 приведены расчеты времени прихода первых волн от точечного источника и линии источников для методов бихарактеристик и Годунова, соответственно.

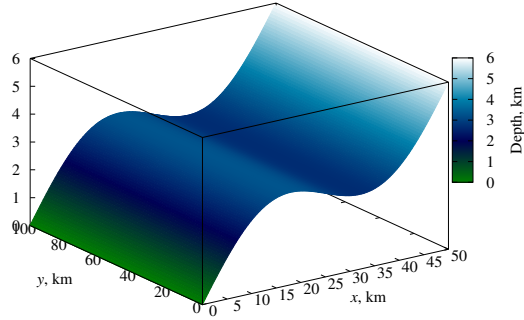


Рис. 2.2. Рельеф дна. Все размеры указаны в километрах.

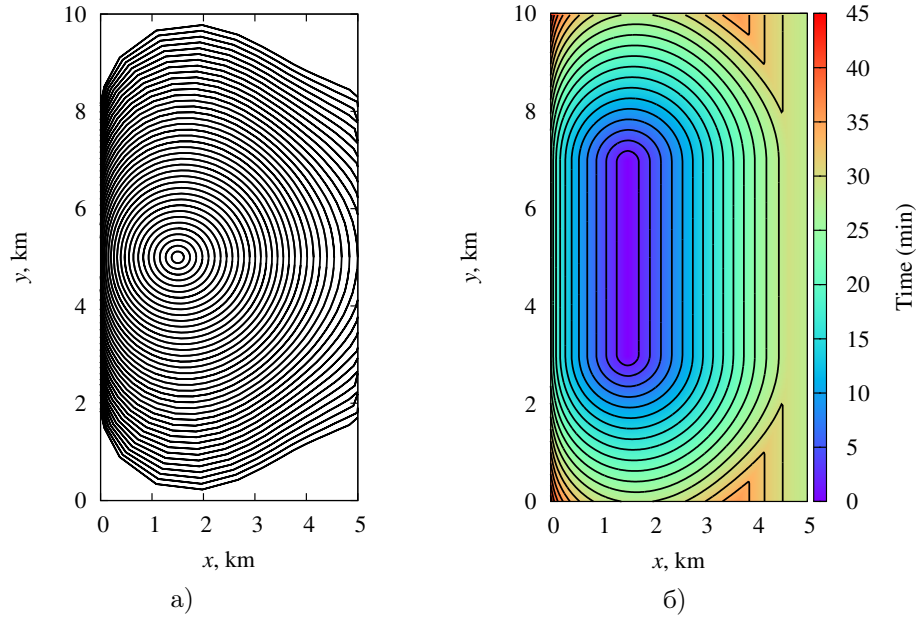


Рис. 2.3. Расчет времени прихода первых волн: а) от точечного источника; б) от линии источников.

Отметим, что метод Годунова уступает методу бихарактеристик в скорости расчетов (примерно в 3 раза). Однако метод Годунова хорошо показывает себя

на источнике произвольной геометрии, в то время как метод бихарактеристик накапливает ошибки при суммировании результата для точечных источников (произвольный источник разбивается на точечные источники, для каждого из которых получаем волновую картину методом бихарактеристик).

3. АМПЛИТУДА ПЕРЕДНЕГО ФРОНТА ВОЛНЫ ЦУНАМИ

С решением уравнения эйконала тесно связана задача определения амплитуды переднего фронта волны, порожденной слабо меняющимся по переменной y разломом дна $u(x, y, 0) = g(y) \cdot \delta(x)$, алгоритм решения которой подробно изложен в работе [5].

Система уравнений мелкой воды, описывающая движение длинных волн (волн цунами), после некоторых замен [5] сводится к задаче на полуплоскости:

$$\begin{cases} \eta_{tt} = \operatorname{div} (c^2(x, y) \operatorname{grad} \eta), & x, y > 0, t > 0; \\ \eta|_{t < 0} \equiv 0, \quad \eta_x|_{x=0} = \frac{1}{2}g(y) \cdot \delta(t), & y > 0, t > 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Здесь $c(x, y) = \sqrt{gH(x, y)}$, $H(x, y)$ – глубина в точке (x, y) , $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака.

При помощи замены переменных $z = \tau(x, y)$, $\alpha = y$, где $\tau(x, y)$ является решением задачи Коши для уравнения эйконала

$$\begin{cases} \tau_x^2 + \tau_y^2 = c^{-2}(x, y), & x > 0, y \in \mathbb{R}, \\ \tau(0, y) = 0, \quad \tau_x > 0, & y \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (3.2)$$

и замены $v(z, \alpha, t) = \eta(x, y, t)$, $b(z, \alpha) = c(x, y)$, задача (3.1) переписывается следующим образом:

$$\begin{cases} v_{tt} = v_{zz} + b^2 v_{\alpha\alpha} + 2b^2 \tau_y v_{z\alpha} + (b^2(\tau_{xx} + \tau_{yy}) + 2\frac{b_z}{b} + 2bb_\alpha \tau_y) v_z + \\ \quad + 2b(b_z \tau_y + b_\alpha) v_\alpha, \quad z, \alpha > 0, t > 0, \\ v|_{t < 0} = 0, \quad v_z|_{z=0} = -\frac{g(\alpha)}{2\sqrt{\frac{1}{b^2(0, \alpha)} - \tau_y^2}} \delta(t) + \frac{\tilde{h}(\alpha, t)}{2\sqrt{\frac{1}{b^2(0, \alpha)} - \tau_y^2}}. \end{cases}$$

Представляя решения последней задачи в виде $v(z, \alpha, t) = s(z, \alpha) \cdot \theta(t - z) + \bar{v}(z, \alpha, t)$, $t > z > 0$, и приравнявая коэффициенты при дельта-функции $\delta(t - z)$, получим задачу для амплитуды волны $s(z, \alpha)$:

$$\begin{cases} 2s_z + 2b^2 \tau_y s_\alpha + (b^2(\tau_{xx} + \tau_{yy}) + 2\frac{b_z}{b} + 2bb_\alpha \tau_y) s = 0, & z, \alpha > 0, \\ s(0, \alpha) = \frac{g(\alpha)}{2\sqrt{\frac{1}{b^2(0, \alpha)} - \tau_y^2}}, & \alpha > 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Здесь $\tilde{v}(z, \alpha, t)$ – некоторая гладкая функция, $\theta(t - z)$ – тета-функция Хевисайда.

Построенный численный алгоритм решения задачи Коши для волнового уравнения позволяет определить амплитуду фронта волны в интересующей точке в пространственной области в фиксированный момент времени T . Источник $g(y) \cdot \delta(t)$ может быть представлен в виде ряда точечных источников, в силу чего решения задачи (3.2) сводится к решению задачи (1.1) для каждого точечного источника (данный подход был предложен в работе [4]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С.К. Годунов, *Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики*, Матем. сборник, **47**, № 3, С. 271-306, 1959.
- [2] Д.И. Иванов, И.Э. Иванов, И.А. Крюков, *Алгоритмы приближенного решения некоторых задач прикладной геометрии, основанные на уравнении типа Гамильтона-Якоби*, Журнал вычислительной математики и математической физики, **45**, № 8, С. 1345-1358, 2005.
- [3] С.И. Кабанихин, *Обратные и некорректные задачи*, Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009.
- [4] A.Yu. Bezhaev, M.M. Lavrentiev (jr.), An.G. Marchuk, V.V. Titov. *Determination of tsunami sources using deep ocean wave records*, Bull. Nov. Comp. Center, Math. Model. in Geoph., **11**, pp. 53-63, 2006.
- [5] S.I. Kabanikhin, O.I. Krivorot'ko, *A numerical method for determining the amplitude of a wave edge in shallow water approximation*, Applied Computational Mathematics, **12**, № 1, pp. 91-96, 2013.
- [6] В.С. Владимиров, *Уравнения математической физики*, издание 4, Москва: Наука, 1981.
- [7] В.П. Михайлов, *Дифференциальные уравнения в частных производных*, Москва: Наука, 1976.
- [8] В.Г. Романов, *О локальной разрешимости некоторых многомерных обратных задач для уравнений гиперболического типа*, Дифференциальные уравнения, **2**, № 25, С. 275-283, 1989.
- [9] Воронина Т.А. *Определение пространственного распределения источников колебаний по дистанционным измерениям в конечном числе точек*, СибЖВМ, Т. 7, № 3, 2004, С. 203-211.

КАБАНИХИН СЕРГЕЙ ИГОРЕВИЧ
ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГЕОФИЗИКИ СО РАН,
пр-т Лаврентьева 6,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: kabanikhin@sscc.ru

КРИВОРОТЬКО ОЛЬГА ИГОРЕВНА
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ,
ул. Пирогова 2,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: krivorotko.olya@mail.ru