

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ КИНЕТИЧЕСКИ-СОГЛАСОВАННЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ С РЯДОМ СЕТОЧНЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Г. Г. Лазарева^{1, 2}, А. Г. Максимова²

¹ *Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, 630090, Новосибирск*

² *Новосибирский государственный университет, 630090, Новосибирск*

УДК 519.63

В данной работе рассмотрены и протестированы различные модификации дискретных кинетических моделей, описывающих одночастичную функцию распределения. Проведено сравнение тестовых решений с решениями, полученными явными методами решения уравнений газовой динамики. Приведен контрпример, показывающий необходимость учёта последовательности вывода уравнений используемого метода.

Ключевые слова: вычислительная математика, методы решения уравнений газовой динамики, разностные схемы, дискретные кинетические модели.

Введение

В данной работе мы рассмотрим нетривиальный подход к созданию вычислительных алгоритмов решения уравнений газовой динамики. Для создания кинетически-согласованных разностных схем (КСРС) сначала строится разностная аппроксимация уравнения Больцмана. Затем эта аппроксимация осредняется по скоростям молекул и выводятся разностные уравнения для газодинамических параметров. В традиционных методах решения уравнений газовой динамики последовательность действий иная. Сначала производится осреднение по скоростям молекул уравнения Больцмана с использованием предположения о функции распределения с получением уравнений Навье—Стокса или Эйлера. И только затем строится разностная аппроксимация.

1 Кинетически-согласованные разностные схемы

Примем следующую модель изменения одночастичной функции распределения [2]. В момент времени t^n для каждого отрезка $[x_j, x_{j+1}]$ существует своя постоянная на отрезке одначастичная функция распределения, совпадающая с максвелловской. Газодинамические параметры ρ_j, u_j, p_j постоянны на отрезке. За время $\tau = t^{n+1} - t^n$ газ совершает бесстолкновительный разлёт. В каждый момент t^n происходит мгновенная максвеллизация функции распределения. Отметим, что для газодинамических процессов максвелловское распределение одначастичной функции является адекватным. Именно эта функция соответствует столкновениям молекул в газе. После осреднения по скоростям молекул получается громоздкая схема с интегралом ошибок:

$$\begin{aligned}
\frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\tau} + (\rho u)_{\dot{x}} &= \frac{h}{2} \left[\rho u \operatorname{erf}(s) + \frac{1}{\beta\sqrt{\pi}} \exp(-s^2) \right]_{\bar{x}x}, \\
\frac{(\rho u)_i^{n+1} - (\rho u)_i^n}{\tau} + (\rho u^2 + p)_{\dot{x}} &= \frac{h}{2} \left[(\rho u^2 + p) \operatorname{erf}(s) + \frac{\rho u \exp(-s^2)}{\beta\sqrt{\pi}} \right]_{\bar{x}x}, \\
\frac{E_i^{n+1} - E_i^n}{\tau} + (u(E + p))_{\dot{x}} &= \frac{h}{2} \left[u(E + p) \operatorname{erf}(s) + \frac{1}{\beta\sqrt{\pi}} \left(E + \frac{p}{2} \right) \exp(-s^2) \right]_{\bar{x}x},
\end{aligned} \tag{1}$$

где ρ плотность газа, h — шаг сетки по пространству, T — температура, $p = \rho RT$ — давление, u — скорость газа, γ — показатель адиабаты, $\varepsilon = \frac{RT}{\gamma-1}$ — внутренняя энергия, $E = \frac{\rho u^2}{2} + \rho\varepsilon$ — полная энергия. Интеграл ошибок $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-z^2) dz$, где $s = \beta u$, $\beta = \frac{1}{\sqrt{2RT}}$. Центральная разность для аппроксимации первой производной $a_{\dot{x}} = \frac{a_{i+1} - a_{i-1}}{2h}$. Разностная аппроксимация второй производной $a_{\bar{x}x} = \frac{a_{i+1} - 2a_i + a_{i-1}}{2h^2}$.

2 Квазигазодинамическая система уравнений

Квазигазодинамическая система уравнений (КГУ) является одной из форм дифференциальной записи КСРС [3]. КГУ часто используется при вычислениях из-за её относительной простоты:

$$\begin{aligned}
\frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\tau} + (\rho u)_{\dot{x}} &= \tau_c (\rho u^2 + p)_{\bar{x}x}, \\
\frac{(\rho u)_i^{n+1} - (\rho u)_i^n}{\tau} + (\rho u^2 + p)_{\dot{x}} &= \tau_c (\rho u^3 + 3pu)_{\bar{x}x}, \\
\frac{E_i^{n+1} - E_i^n}{\tau} + (u(E + p))_{\dot{x}} &= \tau_c (u^2(E + 2p))_{\bar{x}x} + \tau_c \left(\frac{p}{\rho} (E + p) \right)_{\bar{x}x},
\end{aligned} \tag{2}$$

где $\tau_c \approx \frac{h}{2c}$ — кинетическое время, за которое молекулы пересекают границу ячейки.

Отметим, что система газодинамических уравнений имеет гиперболический тип, а КГУ — параболический [4].

3 Схема с направленными разностями

Рассмотрим схему с направленными разностями первого порядка [5] с тремя вариантами правой части $F = (f_1, f_2, f_3)^T$:

$$\begin{aligned}
\frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\tau} + u_i^n \frac{\rho_i^n - \rho_{i-1}^n}{h} + u_i^{n-} \frac{\rho_{i+1}^n - \rho_i^n}{h} + \rho_i^n \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} &= f_1, \\
\frac{(\rho u)_i^{n+1} - (\rho u)_i^n}{\tau} + u_i^n \frac{(\rho u)_i^n - (\rho u)_{i-1}^n}{h} + u_i^{n-} \frac{(\rho u)_{i+1}^n - (\rho u)_i^n}{h} + (\rho u)_i^n \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} + \frac{p_{i+1}^n - p_{i-1}^n}{2h} &= f_2, \\
\frac{E_i^{n+1} - E_i^n}{\tau} + u_i^n \frac{E_i^n - E_{i-1}^n}{h} + u_i^{n-} \frac{E_{i+1}^n - E_i^n}{h} + E_i^n \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} + \frac{u_{i+1}^n p_{i+1}^n - u_{i-1}^n p_{i-1}^n}{2h} &= f_3,
\end{aligned} \tag{3}$$

где $u_i^{n\pm} = \frac{u_i^n \pm |u_i^n|}{2}$, h, τ шаги по пространству и времени. $F = (0, 0, 0)^T$ соответствует первоначальной схеме с направленными разностями.

Схема с направленными разностями с правой частью КСРС (1):

$$F = \begin{pmatrix} \frac{h}{2} \left[\rho u \operatorname{erf}(s) + \frac{1}{\beta\sqrt{\pi}} \exp(-s^2) \right]_{\bar{x}x} \\ \frac{h}{2} \left[(\rho u^2 + p) \operatorname{erf}(s) + \frac{\rho u \exp(-s^2)}{\beta\sqrt{\pi}} \right]_{\bar{x}x} \\ \frac{h}{2} \left[u(E + p) \operatorname{erf}(s) + \frac{1}{\beta\sqrt{\pi}} \left(E + \frac{p}{2} \right) \exp(-s^2) \right]_{\bar{x}x} \end{pmatrix} \tag{4}$$

Схема с направленными разностями с правой частью КГУ (2):

$$F = \begin{pmatrix} \tau_c (\rho u^2 + p)_{\bar{x}x} \\ \tau_c (\rho u^3 + 3pu)_{\bar{x}x} \\ \tau_c (u^2(E + 2p))_{\bar{x}x} + \tau_c \left(\frac{p}{\rho} (E + p) \right)_{\bar{x}x} \end{pmatrix} \tag{5}$$

4 Схема Стегера — Варминга

Аналогично рассмотрим схему Стегера — Варминга [6] с тремя вариантами правой части:

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} + \frac{F_{j+1/2}^n - F_{j-1/2}^n}{h} = 0, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} U &= (\rho, \rho u, E)^T, F_{j+1/2} = A_j^+ U_j + A_{j+1}^- U_{j+1}, \\ A^\pm &= R D^\pm L, D^\pm = \text{diag}(d_1^\pm, d_2^\pm, d_3^\pm), \\ d_k^\pm &= \frac{1}{2}(a_k \pm |a_k|), \\ a_1 &= u - c, a_2 = u, a_3 = u + c, \\ E &= \frac{\rho u^2}{2} + \frac{p}{\gamma - 1}, c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}, H = \frac{E + p}{\rho}, \\ L &= \begin{pmatrix} uc + (\gamma - 1)\frac{u^2}{2} & -c - (\gamma - 1)u & \gamma - 1 \\ 1 - (\gamma - 1)\frac{u^2}{2c^2} & (\gamma - 1)\frac{u}{c^2} & -(\gamma - 1)\frac{1}{c^2} \\ -uc + (\gamma - 1)\frac{u^2}{2} & c - (\gamma - 1)u & \gamma - 1 \end{pmatrix}, \\ R = L^{-1} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2c^2} & 1 & \frac{1}{2c^2} \\ \frac{1}{2c^2}(u - c) & u & \frac{1}{2c^2}(u + c) \\ \frac{1}{2c^2}(H - uc) & \frac{u^2}{2} & \frac{1}{2c^2}(H + uc) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$F = (0, 0, 0)^T$ определяет схему Стегера — Варминга, $F = (f_1, f_2, f_3)^T$ из (4) и (5) соответствует схеме Стегера — Варминга с КСРС (1) и КГУ (2).

5 Результаты тестов

Рассмотрим поведение невязкого газа в одномерном случае на примере задачи Римана с известным точным решением [7]. При $x = x_0$ стоит перегородка, разделяющая газ в трубе. С левой стороны перегородки газ имеет параметры ρ_1, u_1, p_1 , а с правой ρ_2, u_2, p_2 . Для определённости будем считать, что $p_1 > p_2$. В таком случае начальные данные задачи примут следующий вид:

Начальные данные: $\rho_1 = 1, u_1 = 0, p_1 = 1, \rho_2 = 0.125, u_2 = 0, p_2 = 0.1$. В момент времени $t = 0$ перегородку убирают.

Рассмотрим результаты тестов, отображающие погрешность решения в среднеквадратичной норме, при различных шагах по времени и пространству в момент времени $t = 1$.

Графики (рис. 1 а, б) показывают, что КСРС точнее, чем первоначальная схема с направленными разностями (3). КГУ имеет преимущество при малых шагах по пространству и требует улучшения порядка сходимости по времени. Отметим, что КГУ второго порядка сходимости по времени с добавленной второй временной производной имеет параболический тип решаемой системы уравнений [4].

Графики (рис. 2 а, б) демонстрируют, что добавление правой части $F = (f_1, f_2, f_3)^T$ (4,5) понижает точность первоначальной схемы Стегера — Варминга (6). Это связано с тем, что схема Стегера — Варминга получена методом, основанном на характеристиках. Этот метод не согласуется с способом построения КСРС и КГУ. Этот контрпример показывает необходимость учёта метода получения схемы.

Рассмотрим скорости сходимости при измельчении шага дискретизации. Порядок точности $\mathcal{P}(h)$ определяется для некоторой величины f , рассматриваемой с последовательным уменьшением шага h , при помощи правила Рунге [8]:

$$\mathcal{P}(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\log_2 \frac{f(2h) - f(h)}{f(h) - f(h/2)} \right).$$

График (рис. 3 а, б) показывает, что порядок сходимости не достигает первого порядка на примере закона сохранения масс:

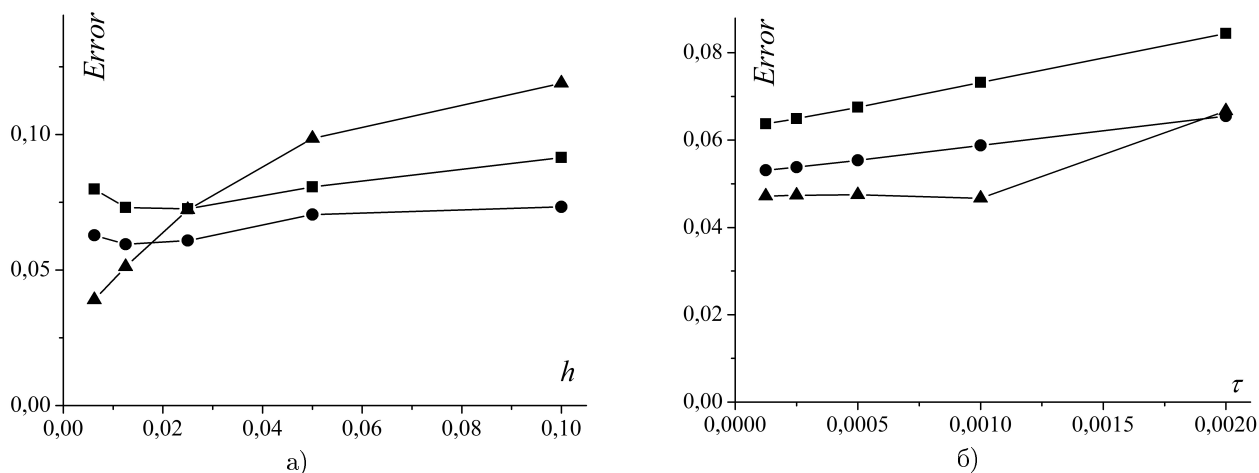


Рис. 1: Погрешность в среднеквадратичной норме схемы с направленными разностями (квадратный символ), схемы с направленными разностями с КСРС (круглый символ), с КГУ (треугольный символ). (а) — различные шаги по пространству при $\tau = 0.001$. (б) — различные шаги по времени при $h = 0.01$.

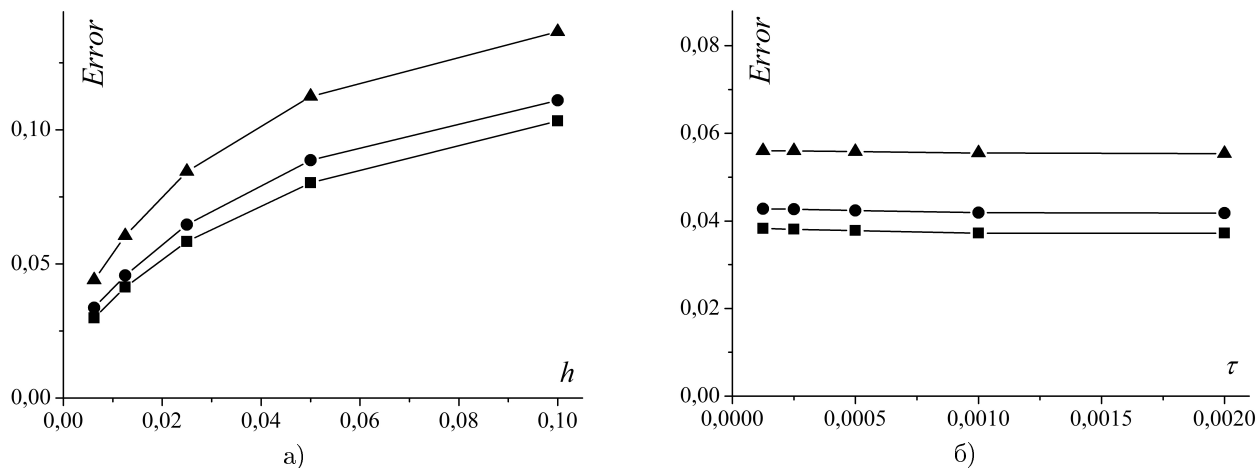


Рис. 2: Погрешность в среднеквадратичной норме схемы Стегера — Варминга (квадратный символ), схемы Стегера — Варминга с КСРС (круглый символ), с КГУ (треугольный символ). (а) — различные шаги по пространству при $\tau = 0.001$. (б) — различные шаги по времени при $h = 0.01$.

$$f_\rho = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t_2) dx - \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t_1) dx + \int_{t_1}^{t_2} (\rho u)(x_2, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} (\rho u)(x_1, t) dt.$$

На разрывных решениях порядок аппроксимации не достигает первой степени [8]. Определение точности порядка для разрывных решений связано с областью определения этих решений и зависит от области в которой производится расчёт.

Заключение

В работе были рассмотрен вывод уравнений КСРС и КГУ. Этот подход использован для схемы с направленными разностями и схемы Стегера — Варминга. Проведена серия тестов для задачи Римана на сгущающихся сетках. Схема с направленными разностями для КСРС и КГУ показала высокую точность. Так же были показаны плюсы и минусы КСРС и КГУ. Построенный контрпример с применением схемы Стегера — Варминга показал необходимость учёта последовательности вывода уравнений КСРС и КГУ.

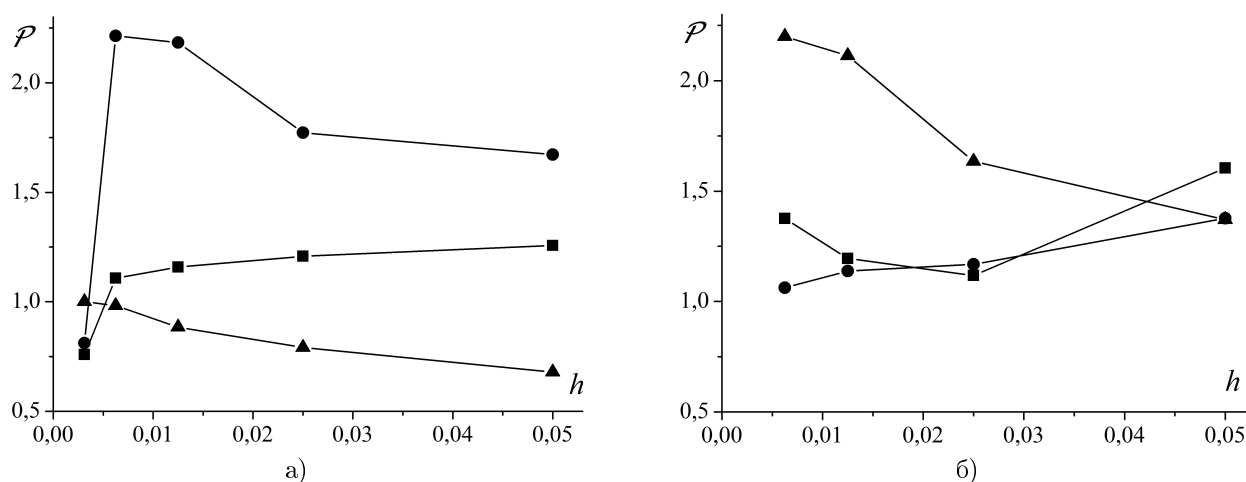


Рис. 3: Порядок сходимости плотности ρ при различных шагах по пространству, $\tau = 0.0005$, $t_1 = 0.3$, $t_2 = 0.4$, $x_1 = -0.6$, $x_2 = -0.2$. (а) — вычислено для схемы с направленными разностями (квадратный символ), схемы с направленными разностями с КРС (круглый символ), с КГУ (треугольный символ), (б) — вычислено для схемы Стекера — Варминга (квадратный символ), для схемы Стекера — Варминга с КРС (круглый символ), с КГУ (треугольный символ).

Список литературы

- [1] Четверушкин Б. Н. Кинетически-согласованные схемы в газовой динамике // М.: МГУ, 1999. — 232 с.
- [2] Четверушкин Б. Н., Елизарова Т. Г. Кинетические алгоритмы для расчёта газодинамических течений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 25:10, 1985. 1526–1533 с.
- [3] Chetverushkin B.N., Romanyukha N. Yu. Kinetic and Lattice Boltzmann Schemes // Parallel Computational Fluid Dynamics, Multidisciplinary Applications (Elsevier, Amsterdam, 2005), pp. 257–262.
- [4] Д’Асчензо Н., Савельев В. И., Четверушкин Б. Н. Об одном алгоритме решения параболических и эллиптических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 55:8, 2015. 1320–1328 с.
- [5] Patankar S. V. Numerical Heat Transfer and Fluid Flow // Taylor and Francis, 1980.
- [6] Steger J.L., Warming R.F. Flux-vector splitting of the inviscid gas-dynamic equations with applications to finite difference schemes // J. Comput. Phys. 40, 1981, pp. 263–293.
- [7] Toro E.F. Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics // Springer-Verlag. Second Edition, 1999.
- [8] Годунов С. К., Манузина Ю. Д., Назарьева М. А. Экспериментальный анализ сходимости численного решения к обобщенному решению в газовой динамике // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 51:1, 2011. 88–95 с.
- [9] Годунов С. К., Куликов И. М. Расчёт разрывных решений уравнений гидродинамики с гарантией неубывания энтропии // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 54:6, 2014. 1008–1021 с.

Галина Геннадьевна Лазарева — чл.-корр. к.ф.-м.н., ст. науч.сотр. Института
вычислительной математики и математической геофизики СО РАН;
e-mail: lazareva@ssd.ssc.ru;

Анастасия Глебовна Максимова — студент Новосибирского государственного университета;
e-mail: a.g.maksimova@gmail.com.

Дата поступления — 31 мая 2017 г.